1. DESARROLLO EN SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER.

Cualquier[1] función periódica puede ser escrita como una suma de senos y cosenos, según el desarrollo es serie de Fourier. La expresión de dicha serie es:

$$i(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[A_k \cdot \cos(kw_0 t) + B_k \cdot \sin(kw_0 t) \right]$$

donde i(t) es una función periódica cuyo periodo es $T = \frac{2p}{w_0}$. A ω_0 se le conoce como frecuencia fundamental. El primer término de la serie ($A_0/2$) coincide con el valor medio de la función i(t).

Los coeficientes A_k y B_k se calculan con las expresiones:

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T i(t) \cdot \cos(kw_0 t) \cdot dt; \qquad \mathrm{k} = 0,1,2,3.....$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^T i(t) \cdot \sin(kw_0 t) \cdot dt; \qquad \mathrm{k} = 0,1,2,3....$$

Haciendo uso de relaciones de trigonometría se puede escribir la expresión de la serie de Fourier de manera más compacta:

$$i(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k \cdot \cos(kw_0 t + f_k) \qquad \text{Ecuación 1-1}$$

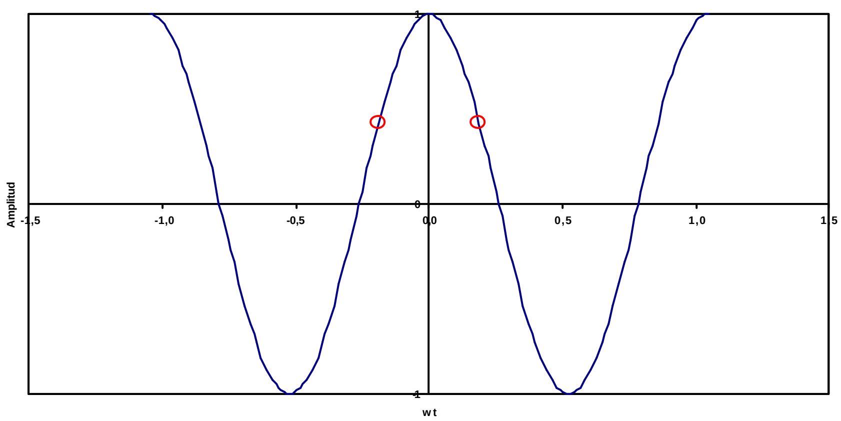
$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \qquad \text{Ecuación 1-2}$$

$$f_k = \tan^{-1}\left(\frac{-B_k}{A_k}\right) \qquad \text{Ecuación 1-3}$$

Estas expresiones se simplifican si el integrando cumple ciertas propiedades. Para entender estas propiedades vamos a repasar algunas definiciones:

Función PAR

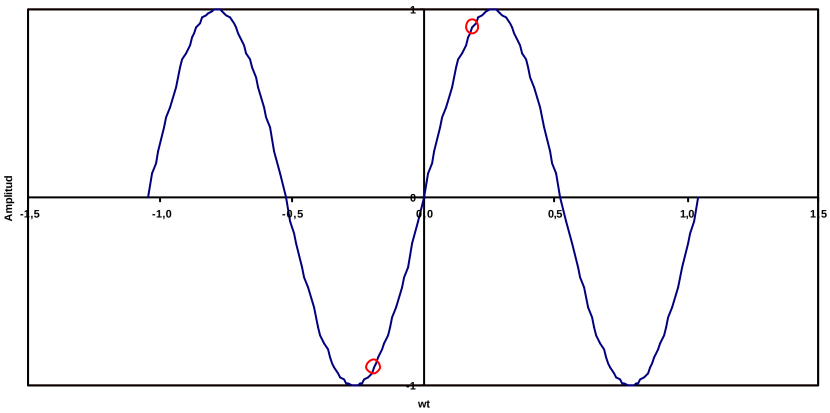
Una función f(t) es PAR si se verifica que $f(t) = f(-t)$ La función coseno es un ejemplo de función par:



[1] La función de cumplir ciertos requisitos.

Función IMPAR

Una función f(t) es IMPAR si se verifica que $f(t) = -f(-t)$. Un ejemplo de función impar es la función seno



Función ALTERNADA

Una función f(t) es ALTERNADA si se verifica que $f(t) = -f(-t + \frac{T}{2})$

El producto de dos funciones verifica las siguientes propiedades

PAR· PAR = PAR

PAR· IMPAR = IMPAR· PAR = IMPAR

IMPAR· IMPAR = PAR

(Fíjate que es igual que el producto de signos)

Volviendo a los coeficientes de la serie de Fourier:

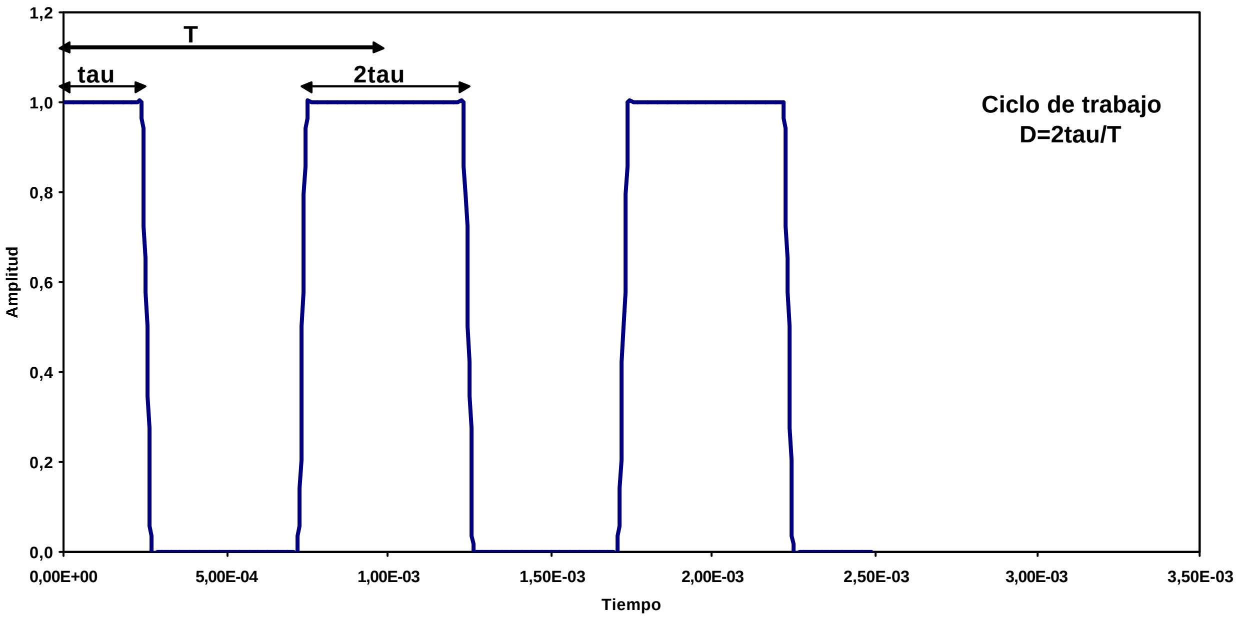
- Si el integrando es una función par todos los B_k son nulos.
- Si el integrando es una función impar todos los A_k son nulos.
- Si el integrando es una función alternada todos los coeficientes pares son nulos.

EJEMPLOS DE SERIES DE FOURIER.

ONDA CUADRADA.

Vamos a determinar el desarrollo en serie de Fourier de una señal i(t) cuadrada de periodo T y ciclo de trabajo D=τ/T. La función i(t) se puede escribir:

$$i(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < t < (T - t) \\ I_p \qquad \text{otro caso} \end{cases}$$



Puesto la función i(t) es PAR, los coeficientes B_k son nulos. Calculamos a continuación los coeficientes A_k:

$$A_k = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T i(t)\cdot\cos(kw_0 t)\cdot dt = \frac{2}{T}\cdot\int_0^t I_p\cdot\cos(kw_0 t)\cdot dt + \frac{2}{T}\cdot\int_{T-t}^{t} I_p\cdot\cos(kw_0 t)\cdot dt$$; integrando:

$$A_k = \frac{2\cdot I_p}{T}\cdot\left[\int_0^t \cos(kw_0 t)\cdot dt + \int_{T-t}^{t}\cos(kw_0 t)\cdot dt\right] = \frac{2\cdot I_p}{T}\cdot\frac{1}{kw_0}\cdot\left\{\sin(kw_0 t)\Big|_0^t + \sin(kw_0 t)\Big|_{T-t}^{T}\right. \qquad \text{Ecuación 1-4}$$

Sustituimos los valores de los extremos en los senos:

(a) $\sin(kw_0 t)\Big|_0^t = \sin(kw_0 t) - \sin(0) = \sin(kw_0 t)$

(b) $\sin(kw_0 t)\Big|_{T-t}^{T} = \sin(kw_0 T) - \sin(kw_0 (T-t))$

teniendo en cuenta que $w_0 = \dfrac{2p}{T}$ rescribimos las ecuaciones anteriores de la siguiente forma:

(a) $\sin(kw_0 t)\Big|_0^t = \sin(2kp\,\dfrac{t}{T})$

(b) $\sin(kw_0 t)\Big|_{T-t}^{T} = \sin(2kp) - \sin(2kp\,(1-\dfrac{t}{T})) = \sin(2kp\,(\dfrac{t}{T}-1))$; puesto que $\sin(2k\pi)=0$.

Este último termino lo desarrollamos como sin(a-b)=sin(a)· cos(b)-cos(a)· sin(b):

(b) $\sin(kw_0 t)\Big|_{T-t}^{T} = \sin(2kp\,\dfrac{t}{T})\cdot\cos(2kp) - \cos(2kp\,\dfrac{t}{T})\cdot\sin(2kp) = \sin(2kp\,\dfrac{t}{T})$; ya que $\cos(2k\pi)=1$.

Sustituimos estos desarrollo en la Ecuación 1-4:

$$A_k = \frac{2\cdot I_p}{T}\cdot\frac{1}{kw_0}\cdot 2\sin(2kp\,\frac{t}{T}) = \frac{2\cdot I_p}{kp}\cdot\sin(kpD) = 2\cdot I_p\cdot D\cdot\left(\frac{\sin(kpD)}{kpD}\right) \qquad \text{Ecuación 1-5}$$

Donde hemos usado la definición de ciclo de trabajo D=2τ/T.

Una vez calculado el valor de los coeficientes, procedemos a escribir la serie sustituyendo los valores de A_k y B_k en la Ecuación 1-1 y la Ecuación 1-2:

$C_k = A_k = 2I_p D \cdot \left(\dfrac{\sin(kpD)}{kpD} \right)$; ya que los B_k son nulos por ser i(t) función PAR.

$$f_k = \tan^{-1}\left(\frac{-B_k}{A_k} \right) = 0$$

$$i(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2I_p D \cdot \left(\frac{\sin(kpD)}{kpD} \right) \cdot \cos\left(\frac{kpD}{t} t \right)$$

El primer término de la serie (para k = 0) lo calculamos aparte:

$C_0 = A_0 = 2I_p D \cdot \dfrac{\sin(0)}{0} \approx 2I_p D \cdot \dfrac{kpD}{kpD} = 2I_p D$; donde se ha aproximado el valor del seno por el valor del ángulo (válido para ángulos tendiendo a cero) para salvar la indeterminación 0/0.

Con todo esto ya tenemos el desarrollo en serie de la función i(t):

$i(t) =$	
+ $I_p D$	"Componente de continua o valor medio de i(t)"
+ $\dfrac{2I_p}{p} \cdot \sin(pD) \cdot \cos(w_0 t)$	"Armónico fundamental o 1er armónico"
+ $\dfrac{2I_p}{2p} \cdot \sin(2pD) \cdot \cos(2w_0 t)$	"Segundo armónico de la señal"
+ $\dfrac{2I_p}{3p} \cdot \sin(3pD) \cdot \cos(3w_0 t)$	"Tercer armónico"
+ $\dfrac{2I_p}{4p} \cdot \sin(4pD) \cdot \cos(4w_0 t)$	"Cuarto armónico"
+ $\dfrac{2I_p}{5p} \cdot \sin(5pD) \cdot \cos(5w_0 t)$	"Quinto armónico"
+ $\dfrac{2I_p}{6p} \cdot \sin(6pD) \cdot \cos(6w_0 t)$	"Sexto armónico"

2. CÁLCULO DE ARMÓNICOS.

En el ejemplo anterior se han calculado los armónicos integrando directamente las definiciones de los coeficientes en la serie de Fourier. En este apartado veremos unas definiciones útiles para trabajar con funciones periódicas "distorsionadas", entendiendo por distorsionadas aquellas funciones que distan de ser un tono, es decir, que además del armónico fundamental (seno o coseno de ω_0) tienen presencia de armónicos de orden superior.

Teniendo en cuenta la definición de valor eficaz para un tono, y teniendo en cuenta que cada componente de la serie de Fourier (salvo el primero que es el valor medio de la función) es un tono con amplitud dada por C_k, podemos escribir el valor eficaz de un armónico de la siguiente forma:

$$Armónico_k \equiv I_k = C_k \cdot \cos(kw_0 t + f_k) = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cdot \cos(kw_0 t + f_k)$$

El valor eficaz de cada armónico tendrá la expresión:

$$I_{RMSk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_k^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{A_k^2 + B_k^2}{2}} = \frac{C_k}{\sqrt{2}}$$

Elevando al cuadrado esta última:

$$I_{RMSk}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_k^2 \cdot dt$$ **Ecuación 2-1**

Para poder escribir el valor eficaz de i(t) en función de su desarrollo en serie (Ecuación 1-1), tenemos que calcular $i^2(t)$:

$$i^2(t) = \left[\frac{C_0}{2} + C_1 \cdot \cos(w_0 t + f_1) + C_2 \cdot \cos(2w_0 t + f_2) + \ldots\right] \cdot \left[\frac{C_0}{2} + C_1 \cdot \cos(w_0 t + f_1) + C_2 \cdot \cos(2w_0 t + f_2) + \ldots\right]$$

$$i^2(t) = \left(\frac{C_0}{2}\right)^2 + \frac{C_0}{2} \cdot C_1 \cdot \cos(w_0 t + f_1) + \frac{C_0}{2} \cdot C_2 \cdot \cos(2w_0 t + f_2) + \ldots$$
$$\ldots + C_1 \cdot \cos(w_0 t + f_1) \cdot \frac{C_0}{2} + \left(C_1 \cdot \cos(w_0 t + f_1)\right)^2 + C_1 \cdot \cos(w_0 t + f_1) \cdot C_2 \cdot \cos(2w_0 t + f_2) + \ldots$$
$$\ldots + C_2 \cdot \cos(2w_0 t + f_2) \cdot \frac{C_0}{2} + C_2 \cdot \cos(2w_0 t + f_2) \cdot C_1 \cdot \cos(w_0 t + f_1) + \left(C_2 \cdot \cos(2w_0 t + f_2)\right)^2 + \ldots$$
$$+\ldots$$

Cuando vayamos a integrar para calcular el valor eficaz, tendremos que separa la integral en tantas integrales como sumandos tenemos. Sin embargo, no hace falta calcular todos los término si tenemos en cuenta que al integrar sobre un periodo se verifican las siguientes propiedades:

- La integral sobre un periodo de la función coseno es nula.
- La integral sobre un periodo del producto de razones trigonométricas de diferente frecuencia es nula.

Con estas condiciones los únicos términos que no se van a anular al integra son aquellos que están elevados al cuadrado, es decir, $\left(\frac{C_0}{2}\right)^2$ y todos los $\left(C_k \cdot \cos(kw_0 t + f_k)\right)^2$ desde k = 1 hasta infinito. Integraremos por lo tanto estos términos:

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{C_0}{2}\right)^2 \cdot dt + \frac{1}{T}\int_0^T C_1^2 \cdot \cos^2(w_0 t + f_1) dt + \frac{1}{T}\int_0^T C_2^2 \cdot \cos^2(2w_0 t + f_2) dt + \ldots}$$

Todas las integrales, salvo la primera son de la misma forma. Resolvemos el caso genérico:

$\frac{C_k^2}{T}\cdot\int_0^T \cos^2(kw_0 t+f_0)\cdot dt=\frac{C_k^2}{T}\cdot\int_0^T\frac{1}{2}\cdot dt+\frac{C_k^2}{T}\cdot\int_0^T\frac{1}{2}\cdot\cos(2kw_0 t+2f_0)dt$, donde hemos usado la relación trigonométrica $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1\Rightarrow\cos^2(a)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2a)$.

El resultado de la integral genérica es :

$$\frac{C_k^2}{T}\cdot\int_0^T \cos^2(kw_0 t+f_0)\cdot dt=\frac{C_k^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2kw_0}\cdot\left(\sin(2kw_0 T+2f_k)-\sin(2f_k)\right).$$

Si sustituimos en esta última $T\cdot w_0=2p$ tendremos:

$$\frac{C_k^2}{T}\cdot\int_0^T \cos^2(kw_0 t+f_0)\cdot dt=\frac{C_k^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2kw_0}\cdot\left(\sin(4kp+2f_k)-\sin(2f_k)\right)$$ **Ecuación 2-2**

Ahora bien, $\sin(4kp+2f_k)=\sin(4kp)\cdot\cos(2f_k)+\cos(4kp)\cdot\sin(2f_k)=\sin(2f_k)$, por lo que el segundo sumando de la Ecuación 2-2 es nulo.

Con todo esto podemos escribir:

$$I_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\cdot dt}=\sqrt{\left(\frac{C_0}{2}\right)^2+\frac{C_1^2}{2}+\frac{C_2^2}{2}+\frac{C_3^2}{2}\ldots}=\sqrt{I_{AV}^2+\left(\frac{C_1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{C_2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{C_3}{\sqrt{2}}\right)^2\ldots}$$

Y por fin:

$$I_{RMS}=\sqrt{I_{AV}^2+I_{RMS1}^2+I_{RMS2}^2+I_{RMS3}^2+\ldots}$$ **Ecuación 2-3**

2.1. DISTORSIÓN ARMÓNICA

2.1.1. DISTORSIÓN DE UN ARMÓNICO

Se define la distorsión del armónico de orden k de la siguiente forma:

$$D_k=\frac{I_{RMSk}}{I_{RMS1}}$$ Ecuación 2-4

Es una medida de la proporción que tiene la amplitud del armónico de orden k con respecto al armónico fundamental de la señal. Si entendemos que una señal no distorsionada es aquella que tiene forma senoidal pura, es decir que sólo contiene el armónico fundamental, comprenderemos que otra señal que además tenga armónicos de orden superior estará distorsionada. Cuanto mayor sea la amplitud del término de Fourier correspondiente a ese armónico de orden superior, tanto mayor será la distorsión.

2.1.2. DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL.

Se define la distorsión armónica total como la suma de las contribuciones a la distorsión de cada armónico. Sin embargo no se puede definir como una suma algebraica directa, debido a que los coeficientes de la serie de Fourier pueden ser positivos o negativos. Para calcular la contribución total a la distorsión se define de la siguiente forma:

$$THD = \sqrt{D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + \ldots}$$ **Ecuación 2-5**

Operando sobre esta última ecuación podemos redefinir el valor eficaz de la señal i(t) en función de los parámetros de distorsión:

$$THD^2 = D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + \ldots = \frac{I_{RMS2}^2 + I_{RMS3}^2 + I_{RMS4}^2 + \ldots}{I_{RMS1}^2} \Rightarrow I_{RMS2}^2 + I_{RMS3}^2 + I_{RMS4}^2 + \ldots = THD^2 \cdot I_{MRS1}^2$$

Sustituyendo en la Ecuación 2-3 queda:

$$I_{RMS} = \sqrt{I_{AV}^2 + I_{RMS1}^2 \cdot \left(1 + THD^2\right)}$$ **Ecuación 2-6**

3. POTENCIA

Para terminar este apéndice, damos las definiciones de las diferentes potencias que se usan en electrónica de potencia.

Supongamos un dispositivo cualquiera sometido a un potencial instantáneo v(t) y por el cual circula una corritente instantánea i(t). Se define la potencia instantánea suministrada al dispositivo p(t) = v(t)· i(t).

3.1. POTENCIA MEDIA, REAL O ACTIVA

No es más el valor medio de la potencia instantánea:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t) \cdot dt$$ **Ecuación 3-1**

La potencia media tiene por unidad el W.

3.2. POTENCIA APARENTE

Se define de la siguiente forma:

$$P_{ap} = V_{RMS} \cdot I_{RMS}$$ **Ecuación 3-2**

Donde V_{RMS} e I_{RMS} son el voltaje eficaz y la corriente eficaz en el dispositivo. La potencia aparente tiene por unidad el voltamperio (VA)

3.3. FACTOR DE POTENCIA

La definición de este parámetro pretender evaluar la diferencia que puede existir entre las dos potencias definidas.

$$f = \frac{P}{P_{ap}} \leq 1$$ **Ecuación 3-3**

Si f es la unidad quiere decir que la potencia activa y la potencia aparente son iguales. Las compañías que suministran electricidad tarifan sólo la potencia activa (cuya medida de consumo es fácil de realizar), por lo que siempre pretenden que f sea la unidad. Sin embargo lo normal es que haya diferencias, y que la compañía esté suministrando $P_{ap} > P$, por lo que perdería dinero.

La diferencia entre ambas potencias se debe a dos factores:

a) Por la diferencia en las formas de la ondas de corriente y de tensión, es decir, por la distorsión armónica.

b) Por es desfase entre la tensión y la corriente.

Existen diferentes formas de corregir el factor de potencia (es decir llevarlo lo más cerca posible al valor 1), sin embargo las correcciones dependen de la naturaleza de la causa que provoca la diferencia entre la potencia activa y la potencia aparente.

3.4. CÁLCULO DEL FACTOR DE POTENCIA

Supongamos que la señal de voltaje y de corriente que circulan por un dispositivo tienen una forma general desconocida (no analítica). Para poder calcular la potencia activa y la potencia aparente tenemos que expresar ambas señales en sus componentes de Fourier.

$$v(t) = V_{AV} + V_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1) + V_{p2} \cdot \sin(2w_0 t + j_2) + \ldots$$ **Ecuación 3-4**

$$i(t) = I_{AV} + I_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1 + f_1) + I_{p2} \cdot \sin(2w_0 t + j_2 + f_2) + \ldots$$ **Ecuación 3-5**

donde se han puesto los armónicos de corriente desfasados un ángulo ϕ_k respecto a los armónicos de tensión.

3.4.1. CÁLCULO DE LA POTENCIA ACTIVA:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left(V_{AV} + V_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1) + \ldots\right) \cdot \left(I_{AV} + I_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1 + f_1) + \ldots\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T V_{AV} \cdot I_{AV} \cdot dt + \frac{1}{T}\int_0^T V_{AV} \cdot I_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1 + f_1) \cdot dt + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^T V_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1) \cdot I_{AV} \cdot dt + \frac{1}{T}\int_0^T V_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1) \cdot I_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1 + f_1) \cdot dt + \ldots$$

La mayoría de las integrales resultantes se anulan si tenemos en cuenta que:

- Integrales sobre un periodo de funciones impares (senos) son nulas.
- Integrales sobre un periodo de producto de razones trigonométricas de diferente frecuencia son nulas.

Según esas reglas todas las integrales en las que el integrando sea una constante por un seno son nulas, y todas las integrales cuyo integrando sea el producto de senos de diferente frecuencia también son nulas. Por lo tanto queda:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T V_{AV} \cdot I_{AV} \cdot dt +$$
$$+\frac{1}{T}\int_0^T V_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1) \cdot I_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1 + f_1) \cdot dt +$$
$$+\frac{1}{T}\int_0^T V_{p2} \cdot \sin(2w_0 t + j_2) \cdot I_{p2} \cdot \sin(2w_0 t + j_2 + f_2) \cdot dt +$$
$$+\frac{1}{T}\int_0^T V_{p3} \cdot \sin(3w_0 t + j_3) \cdot I_{p3} \cdot \sin(3w_0 t + j_3 + f_3) \cdot dt + \dots$$

Todas las integrales, salvo la primera, son de la misma forma. Resolvemos el caso genérico:

$$\frac{1}{T}\int_0^T V_{pk} \cdot I_{pk} \cdot \sin(kw_0 t + j_k) \cdot \sin(kw_0 t + j_k + f_k) \cdot dt =$$
$$= \frac{V_{pk} \cdot I_{pk}}{T} \cdot \left[\int_0^T \frac{1}{2}\cos(f_k) \cdot dt - \int_0^T \frac{1}{2}\cos(2kw_0 t + 2j_k 2f_k) \cdot dt \right]$$

donde hemos hecho uso de la igualdad trigonométrica ***sen(a)· sen(b)=0,5·[cos(a-b) - cos(a+b)]***

Ahora bien, la segunda integral debe ser nula ya que es la integral de un coseno en un periodo, por lo que el valor de la integral genérica es:

$$\frac{1}{T}\int_0^T V_{pk} \cdot I_{pk} \cdot \sin(kw_0 t + j_k) \cdot \sin(kw_0 t + j_k + f_k) \cdot dt =$$
$$= \frac{V_{pk} \cdot I_{pk}}{2T} \cdot \cos(f_k) \cdot (T - 0) = \frac{V_{pk} \cdot I_{pk}}{2} \cdot \cos(f_k) = \frac{V_{pk} \cdot I_{pk}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \cos(f_k) = V_{RMSk} \cdot I_{RMSk} \cdot \cos(f_k)$$

Escribimos ahora la expresión de la potencia activa sustituyendo el valor de las integrales calculadas:

$$P = V_{AV} \cdot I_{AV} + V_{RMS1} \cdot I_{RMS1} \cdot \cos f_1 + V_{RMS2} \cdot I_{RMS2} \cdot \cos f_2 + \dots$$ **Ecuación 3-6**

3.4.2. CÁLCULO DE LA POTENCIA APARENTE:

Usando la Ecuación 2-6 podemos expresar la potencia aparente sin tener que calcular las integrales:

$$P_{ap} = V_{RMS} \cdot I_{RMS} = \sqrt{\left[I_{AV}^2 + I_{RMS1}^2 \cdot \left(1 + THD_I^2\right)\right] \cdot \left[V_{AV}^2 + V_{RMS1}^2 \cdot \left(1 + THD_V^2\right)\right]}$$ **Ecuación 3-7**

3.4.3. CASOS PARTICULARES

3.4.3.1. SEÑALES SIN DISTORSIÓN, SIN COMPONENTE DE CONTINUA PERO CON DESFASE

El ejemplo típico de un condensador sometido a una tensión senoidal y atravesado por una corriente senoidal desfasada 90º respecto al voltaje.

Puesto que las señales no tienen distorsión, $THD_V = THD_I = 0$. Además todos los $V_{RMSk} = I_{RMSk} = 0$ menos el fundamental. Si no hay componente de continua $V_{AV} = I_{AV} = 0$.

Sustituyendo estos valores nulos en la Ecuación 3-7 y en la Ecuación 3-6 queda:

$$P = V_{RMS1} \cdot I_{RMS1} \cdot \cos f_1$$
$$P_{ap} = V_{RMS1} \cdot I_{RMS1}$$

El factor de potencia será :

$f = \dfrac{P}{P_{ap}} = \cos f_1$, donde ϕ_1 es el desfase entre la tensión y la corriente.

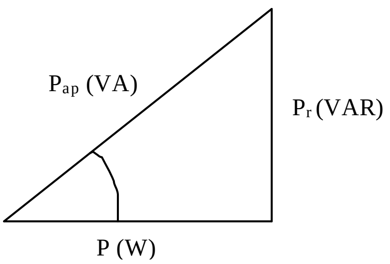
Tradicionalmente se ha intentado evaluar la diferencia entre la potencia aparente y la potencia activa definiendo la "potencia reactiva". Sin embargo este es un concepto lleno de ambigüedades, ya que el origen de la diferencia entre las dos potencias citadas es múltiple y depende de los desfases y de las distorsiones. Una de las definiciones más usuales, que es válida para este caso es la siguiente:

$P_{REACTIVA} \equiv P_r = \sqrt{P_{ap}^2 - P^2}$. La unidad de la potencia reactiva es el *voltamperio reactivo* (VAR).

Con esta definición, y para el caso que nos ocupa:

$$P_r = \sqrt{V_{RMS1}^2 \cdot I_{RMS1}^2 \cdot \left(1 - \cos^2 f_1\right)} = V_{RMS1} \cdot I_{RMS1} \cdot \sin f_1$$

Estas expresiones nos permiten representar las relaciones entre las distintas potencias en forma de fasores:



3.4.3.2. TENSIÓN DE RED "RÍGIDA".

En este caso se supone que la tensión que suministra la red no sufre alteraciones, es decir :

$v(t) = V_p \cdot \sin(w_0 t)$.

La corriente suponemos que está afectada de deformaciones (contiene armónicos de orden superior) y de un desfase respecto al voltaje, y además tiene una componente de continua. Por lo tanto la expresaremos con su desarrollo en serie trigonométrica de Fourier:

$$i(t) = I_{AV} + I_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1) + I_{p2} \cdot \sin(2w_0 t + j_2) + \dots$$

Calculamos la potencia activa:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T V_p \cdot \sin(w_0 t) \cdot \left(I_{AV} + I_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1) + \dots\right) \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T V_p \cdot \sin(w_0 t) \cdot I_{AV} \cdot dt + \frac{1}{T}\int_0^T V_p \cdot \sin(w_0 t) \cdot I_{p1} \cdot \sin(w_0 t + j_1) \cdot dt +$$
$$+ \frac{1}{T}\int_0^T V_p \cdot \sin(w_0 t) \cdot I_{p2} \cdot \sin(2w_0 t + j_2) \cdot dt + \frac{1}{T}\int_0^T V_p \cdot \sin(w_0 t) \cdot I_{p3} \cdot \sin(3w_0 t + j_3) \cdot dt + \dots$$

Todos los sumandos se anulan al integrar menos el segundo, que contiene el producto de los senos de la misma frecuencia. Para resolver la integral del segundo sumando aplicamos la relación trigonométrica siguiente:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

Restando la primera ecuación de la segunda, y sustituyendo $a = w_0 t$ y $b = w_0 t + j_1$, la expresión de la potencia activa queda:

$P = \frac{V_p \cdot I_{p1}}{T} \cdot \left[\int_0^T \cos(-j_1) \cdot dt + \int_0^T \cos(2w_0 t + j_1) \cdot dt \right]$; integrando y teniendo en cuenta que cos(-a) = cos(a):

$$P = V_p \cdot I_{p1} \cdot \cos(j_1) \qquad \textbf{Ecuación 3-8}$$

Según esta última ecuación los armónicos de la corriente no influyen en la potencia activa, tan sólo aparece el desfase del primer armónico de la corriente con respecto a la tensión. Tampoco influye l a componente de continua que tenga la corriente.

Calculamos ahora la potencia aparente. Para ello usamos la expresión de la corriente eficaz dada por la Ecuación 2-6:

$$P_{ap} = V_{RMS} \cdot I_{RMS} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{I_{AV}^2 + I_{RMS1}^2 \cdot \left(1 + THD_I^2\right)} \qquad \textbf{Ecuación 3-9}$$

Como se puede apreciar la potencia aparente depende de todos los armónicos de la corriente y de la componente de continua.

El factor de potencia en este caso particular será:

$$f = \frac{P}{P_{ap}} = \frac{V_p \cdot I_{p1} \cdot \cos j_1}{V_p \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{I_{AV}^2 + I_{RMS1}^2 \cdot \left(1 + THD_I^2\right)}} = \frac{\cos j_1}{\frac{\sqrt{2}}{I_{p1}} \cdot \sqrt{I_{AV}^2 + I_{RMS1}^2 \cdot \left(1 + THD_I^2\right)}} = \frac{\cos j_1}{\sqrt{\left(\frac{I_{AV}}{I_{MRS1}}\right)^2 + \left(1 + THD_I^2\right)}}$$

Si además suponemos que la corriente no tiene componente de continua queda:

$$f = \frac{\cos j_1}{\sqrt{1 + THD_I^2}} \qquad \textbf{Ecuación 3-10}$$

Según esta última ecuación la presencia de armónicos en la corriente hace que descienda el factor de potencia.

Si se usa la expresión definida en párrafos anteriores para la potencia reactiva, $P_{REACTIVA} \equiv P_r = \sqrt{P_{ap}^2 - P^2}$, se llega a $P_r = V_{RMS} \cdot I_{RMS1} \cdot \sqrt{1 + THD_I^2 - 4\cos^2 j_1}$